

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

A4. a. Σωστό, **b.** Σωστό, **γ.** Σωστό*, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

*έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική **διακριτή**

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7} - 3)} = \frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7} - 3)} = \frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+7} - 3)} = \frac{1}{12\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{12\alpha} = \frac{1}{24} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$A(-1, 9) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = 9 \Leftrightarrow -\alpha + \beta + 5 = 9 \stackrel{\alpha=2}{\Leftrightarrow} \beta = 6$$

B2. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 6$ είναι :

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 5 \text{ και } f'(x) = 6x^2 - 6$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

παράλληλη στον άξονα x' σημαίνει ότι :

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x_0^2 = 6 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$$

- Για $x_0 = -1 : f(-1) = 9 \rightarrow A(-1, 9)$

- Για $x_0 = 1 : f(1) = 1 \rightarrow B(1, 1)$

B3. Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f' .

$$f''(x) = 12x$$

x	-∞	0	+∞
$f''(x)$	-	○	+
$f'(x)$			

Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \bullet g'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} + 1 \right)' = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\bullet g'(x_0) = \text{εφ}45^\circ = 1 \Rightarrow \frac{1 - x_0^2}{(x_0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0^2 + 1)^2 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

$$(ε) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$$

$$\Gamma 2. g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	-∞	-1	1	+∞
$g'(x)$	-	○	+	○
$g(x)$				

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$. Η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ την τιμή $g(-1) = \frac{1}{2}$ ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$ την τιμή $g(1) = \frac{3}{2}$.

Γ3. $x_i = -1, 0, x_3, x_4$

- $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = x_1 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = x_2 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = x_3 + 1$
- $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = x_4 + 1$

Είναι $1 < x_3 < x_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (x_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = x_4 + 1 \Leftrightarrow x_4 = 4$$

$$\bullet \bar{\delta}_{\omega_k} = \frac{0 + x_3}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$$\bullet \bar{\delta}_{y_k} = \frac{1 + x_3 + 1}{2} = \frac{2 + x_3}{2}$$

$$\text{Είναι } 2\bar{\delta}_{\omega_k} = \bar{\delta}_{y_k} \Leftrightarrow 2 \frac{x_3}{2} = \frac{2 + x_3}{2} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2x_3 = 2 + x_3 \Leftrightarrow x_3 = 2$$

Γ4. ΣΧΟΛΙΟ:

Η μέση τιμή των τιμών x_1, x_2, x_3, x_4 είναι:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{-1 + 0 + 2 + 4}{4} = \frac{5}{4}$$

Έπρεπε να ζητείται η μέση τιμή της μεταβλητής X

Εύρεση της μέσης τιμής της μεταβλητής X που παίρνει τιμές

x_1, x_2, x_3, x_4 με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$\bullet f_1 = g(x_1) - \frac{1}{3} = g(-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet f_2 = g(x_2) - \frac{1}{3} = g(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f_3 = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\bullet f_4 = 1 - f_1 - f_2 - f_3 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

x_i	f_i	$x_i f_i$
$x_1 = -1$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2 = 0$	$\frac{2}{3}$	0
$x_3 = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$x_4 = 4$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
Σύνολα		$\frac{1}{3}$

$$\bar{x} = \sum x_i f_i = \frac{1}{3}$$

ΧΙΩΤΗΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \frac{8}{5} & F_5 = 1 \\ F_3 \cdot F_5 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 + 1 = \frac{8}{5} \\ F_3 = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} = \frac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \frac{3}{5} \\ \kappa = 1 \end{cases}$$

$$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa \lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \stackrel{\kappa=1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$$

$$\Delta = 289 \text{ και } \lambda = 10 \text{ ή } \lambda = -7$$

Όμως $F_1\% = \lambda \geq 0$, άρα $\lambda = 10$

$$\Delta 2. f_1\% = F_1\% = \lambda = 10$$

$$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$$

$$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = 30$$

$$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$$

$$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = 20$$

$$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$$

$$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = 30$$

$$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = 10$$

$$\Delta 3. \bullet 25\% = f_1\% + \frac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16 \quad (1)$$

$$\bullet 25\% = \frac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24 \quad (2)$$

$$\bullet x_4 - x_2 = 2c \Leftrightarrow 2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$$

1^η κλάση : [α , α + 4), 2^η κλάση : [α + 4 , α + 8)

$$x_2 = \frac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 10$$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10 , 14)	12	10	0,1	10
[14 , 18)	16	30	0,4	40
[18 , 22)	20	20	0,6	60
[22 , 26)	24	30	0,9	90
[26 , 30)	28	10	1	100
ΣΥΝΟΛΑ	-	100	-	-

Δ4. Το 40% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν v παρατηρήσεις

$$40v = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40v = 80000 \Leftrightarrow v = 2000$$